CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 1, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i1.51

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Analisa Pewarnaan Total r-Dinamis pada Graf Lintasan dan Graf Hasil Operasi

Desi Febriani Putri[1,2], Dafik[1,3], Kusbudiono[1,2]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Matematika FKIP Universitas Jember
desifebriani.putri@yahoo.com, d.dafik@unej.ac.id, Kusbudiono@unej.ac.id

Abstract

Graph coloring began to be developed into coloring dynamic. One of the developments of dynamic coloring is r-dynamic total coloring. Suppose $G = (V(G), E(G))$ is a non-trivial connected graph. Total coloring is defined as $c : (V(G) \cup E(G)) \to 1, 2, ..., k, k \in N$, with condition two adjacent vertices and the edge that is adjacent to the vertex must have a different color. r-dynamic total coloring defined as the mapping of the function c from the set of vertices and edges $(V(G) \cup E(G))$ such that for every vertex $v \in V(G)$ satisfy $|c(N(v))| = min[r, d(v) + |N(v)|]$, and for each edge $e = uv \in E(G)$ satisfy $|c(N(e))| = min[r, d(u) + d(v)]$. The minimal k of color is called r-dynamic total chromatic number denoted by $\chi''(G)$. The 1-dynamic total chromatic number is denoted by $\chi''(G)$, chromatic number 2-dynamic denoted with $\chi''_d(G)$ and r-dynamic chromatic number denoted by $\chi''_r(G)$. The graph that used in this research are path graph, $shackle$ of book graph $(shack(B_2, v, n)$ and *generalized shackle* of graph *friendship* $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$.

Keywords : r-dynamic total coloring, r-dynamic total chromatic number, path graph, graph operation
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kososng dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut (u, v) yang disebut sisi [5]. Sebuah graf G dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut dengan graf trivial [3]. Banyaknya titik pada suatu graf disebut kardinalitas titik dinotasikan dengan $|V|$ sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf disebut kardinalitas sisi dinotasikan dengan $|E|$ [4]. Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke suatu sembarang himpunan. Jika daerah asal adalah sebuah sisi disebut dengan pewarnaan sisi. Jika daerah asal adalah titik maka disebut dengan pewarnaan titik. Jika daerah asal titik dan sisi disebut pewarnaan total. Pewarnaan total adalah pemetaan fungsi c dari $(V(G), E(G))$ ke himpunan warna sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang bertetangga, dan setiap dua sisi yang bertetangga serta setiap titik yang bersisian dengan sembarang sisi memiliki warna yang berbeda. Penggunaan warna yang minimum disebut dengan bilangan kromatik, dan selalu memenuhi

 Received: 02 04 2020; **Revised:** 03 23 2020; **Accepted:** 04 30 2020; **Published:** 06 22 2020

Hipotesis 1 sebagai berikut:

Hipotesis 1. *Menurut Behzad dan Vizing bilangan kromatik total untuk setiap graf G harus memenuhi* $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ *[2]*

Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan total r-dinamis yang dikembangkan dari pewarnaan titik dan sisi r-dinamis. Pewarnaan k-warna total r-dinamis merupakan pewarnaan total untuk setiap $v \in V(G)$ sedemikian sehingga $|c(N(v))| \geq min[r, d(v) + |N(v)|]$, dan setiap sisi $e = uv \in E(G)$ sedemikian sehingga $|c(N(e))| \geq min[r, d(v) + d(u)]$ dimana $N(v)$ merupakan ketetanggaan dari v dan $c(N(v))$ merupakan warna yang digunakan oleh titik ketetanggaan dari v serta $N(e)$ merupakan ketetanggaan dari sisi e dan $c(N(e))$ merupakan warna yang digunakan oleh sisi ketetanggaan dari sisi e. Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k-warna total r-dinamis disebut dengan bilangan kromatik total r-dinamis yang dinotasikan dengan $\chi''(G)$. Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitian ini.

Definisi 1. *$Shackle$ dari graf H dinotasikan dengan $G = shack(H, v, n)$ adalah graf G yang dibangun dari graf non trivial $H_1, H_2, ..., H_n$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n$, H_s dan H_t tidak memiliki titik penghubung dimana $|s - t| \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n-1$, H_i dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik bersama* v, *disebut dengan titik penghubung dan $k-1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan* generalized shackle, *dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$ [1].*

Hasil Penelitian

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah definisi dan teorema baru terkait pewarnan total r-dinamis. Definisi pewarnan total r-dinamis dapat dilihat pada Definisi 2. Teorema tersebut tentang pewarnan total r-dinamis pada graf lintasan, $shackle$ graf buku ($shack(B_2, v, n)$ dan graf operasi *generalized shackle* graf *friendship* $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$.

Definisi 2. *Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi pada G ke himpunan warna. Pewarnaan total r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari $(V(G) \cup E(G))$ ke D sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut :*

1. $\forall v \in V(G)$, $|c(N(v))| \geq min[r, d(v) + |N(v)|]$ *dan*
2. $\forall e = uv \in E(G)$, $|c(N(e))| \geq min[r, d(v) + d(u)]$

Observasi 1. *Misalkan $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari graf G maka berlaku* $\chi''(G) \leq \chi''_d(G) \leq \chi''_3(G) \leq \cdots \leq \chi''_{\Delta(G)}(G)$.

Teorema 1. *Misal G adalah suatu graf lintasan P_n. Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik total r-dinamis pada graf G adalah*

$$\chi_r''(P_n) = \begin{cases} 3, \text{ untuk } 1 \leq \text{r} \leq 2 \\ 4, \text{ untuk r} = 3 \\ 5, \text{ untuk r} \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan Observasi 4.1.2 himpunan titik dan himpunan sisi dari graf lintasan untuk $n \geq 3$ adalah $V(P_n)$= $\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n)$= $\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$, sehingga $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n - 1$ serta $\Delta(G) = 2$.

Kasus 1. Berdasarkan Dugaan 1 bahwa $\Delta(G) + 1 \leq \chi_r''(G) \leq \Delta(G) + 2$, sehingga $\chi''(P_n) \geq 3$. Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total $1, 2$-dinamis dari graf lintasan (P_n) adalah 3, maka perlu dibuktikan $\chi''(P_n) \geq 3$ dan $\chi''P_n) \leq 3$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''(P_n) \leq 3$ dengan fungsi pewarnaan c_1. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_1 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_1 : (V(P_n) \cup E(P_n)) \rightarrow D$. Untuk $n \geq 3$, fungsi pewarnaan c_1 adalah sebagai berikut:

$$c_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) = \begin{cases} 132 \ldots 132, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 132 \ldots 132\,1, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 132 \ldots 132\,13, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_1(x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \ldots x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 213 \ldots 213, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 213 \ldots 213\,2, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 213 \ldots 213\,21, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_1 terlihat bahwa bilangan kromatik total pada graf lintasan adalah $\chi''(P_n) \leq 3$. Karena $\chi''(P_n) \leq 3$ dan $\chi''(P_n) \geq 3$ maka $\chi''(P_n) = 3$, sehingga $\chi''(P_n) = \chi_d''(P_n) = 3$ untuk $n \geq 3$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi_3''(G) \geq \chi_2''(G)$, maka $\chi_3''(P_n) \geq \chi_d''(P_n) = 3$. Misal $\chi_3''(P_n) = 3$ seperti pada fungsi pewarnaan c_1, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis, lihat tabel 1. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 4-pewarnaan, $\chi_3''(P_n) \geq 4$. Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 3-

Table 1: Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total $1, 2$-dinamis graf P_6

i	$c(x_i)$	$\|c(N(x_i))\|$	r	$d(x_i)+\|(N(x_i))\|$	$\min\{r, d(x_i)+\|(N(x_i))\|\}$	$\|c(N(x_i))\| \geq \min\{r, d(x_i) + \|(N(x_i))\|\}$
1	1	2	1,2,3	2	1,2,2	**Y,Y,Y**
2	3	2	1,2,3	4	1,2,3	**Y,Y,T**
3	2	2	1,2	4	1,2	**Y,Y**
4	1	2	1,2	4	1,2	**Y,Y**
5	3	2	1,2	4	1,2	**Y,Y**
6	2	2	1,2	2	1,2	**Y,Y**

dinamis dari graf lintasan (P_n) adalah 4, maka perlu dibuktikan $\chi_3''(P_n) \geq 4$ dan $\chi_3''(P_n) \leq 4$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi_3''(P_n) \leq 4$ dengan fungsi pewarnaan c_2. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_2 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_2 : (V(P_n) \cup$

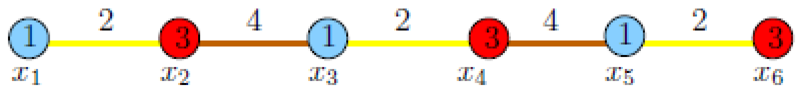

Figure 1: Pewarnaan total 3-dinamis Pada graf lintasan (P_n)

$E(P_n)) \to D$. Untuk $n \geq 3$, fungsi pewarnaan c_2 adalah sebagai berikut:

$$c_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) = \begin{cases} 13\ldots13, \ 1 \leq i \leq n, \ n \text{ genap} \\ 13\ldots13\,1, \ 1 \leq i \leq n, \ n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_2(x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \ldots x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 24\ldots24, \ 1 \leq i \leq n, \ n \text{ ganjil} \\ 24\ldots24\,2, \ 1 \leq i \leq n, \ n \text{ genap} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_2 terlihat bahwa bilangan kromatik total 3-dinamis adalah $\chi_3''(P_n) \leq 4$. Karena $\chi_3''(P_n) \leq 4$ dan $\chi_3''(P_n) \geq 4$ maka $\chi_3''(P_n) = 4$ sehingga $\chi_3''(P_n) = 4$ untuk $n \geq 3$. Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 2 yang merupakan pewarnaan 3-dinamis dari graf lintasan (P_n).

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi_4''(G) \geq \chi_3''(G)$, maka $\chi_4''(P_n) \geq \chi_3''(P_n) = 4$. Misal $\chi_3''(P_n) = 4$ seperti pada fungsi pewarnaan c_2, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis, lihat tabel 2. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 5-pewarnaan, $\chi_4''(P_n) \geq 5$. Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 4-

Table 2: Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 3-dinamis graf P_6

i	$c(x_i)$	$\lvert c(N(x_i))\rvert$	r	$d(x_i)+$ $\lvert(N(x_i))\rvert$	$\min\{r, d(x_i)+$ $\lvert(N(x_i))\rvert\}$	$\lvert c(N(x_i))\rvert \geq \min\{r,$ $d(x_i) + \lvert(N(x_i))\rvert\}$
1	1	2	3,4	2	2,2	**Y,Y**
2	3	3	3,4	4	3,4	**Y,T**
3	1	3	3	4	3	**Y**
4	3	3	3	4	3	**Y**
5	1	3	3	4	3	**Y**
6	3	2	3	2	3	**Y**

dinamis dari graf lintasan (P_n) adalah 5, maka perlu dibuktikan $\chi_4''(P_n) \geq 5$ dan $\chi_4''(P_n) \leq 5$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi_4''(P_n) \leq 5$ dengan fungsi pewarnaan c_3. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_3 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_3 : (V(P_n) \cup E(P_n)) \to D$. Untuk $n \geq 3$, fungsi pewarnaan c_3 adalah sebagai berikut:

$$c_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) = \begin{cases} 13524\ldots13524, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ 13524\ldots13524\,1, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 13524\ldots13524\,13, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 13524\ldots13524\,135, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 3 (\text{mod } 3) \\ 13524\ldots13524\,1352, \ 1 \leq i \leq n, \ i \equiv 4 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

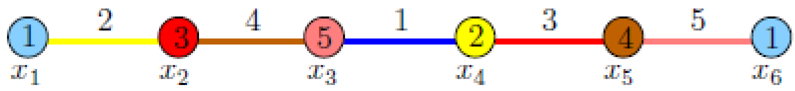

Figure 2: Pewarnaan total r-dinamis Pada graf lintasan (P_n)

$$c_3(x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 24135\ldots24135, \ 1 \le i \le n, \ i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 24135\ldots24135\ 2, \ 1 \le i \le n, \ i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 24135\ldots24135\ 24, \ 1 \le i \le n, \ i \equiv 3(\text{mod } 3) \\ 24135\ldots24135\ 241, \ 1 \le i \le n, \ i \equiv 4(\text{mod } 3) \\ 24135\ldots24135\ 2413, \ 1 \le i \le n, \ i \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_3 terlihat bahwa bilangan kromatik total 4-dinamis adalah $\chi''_4(P_n) \le 5$. Karena $\chi''_4(P_n) \le 5$ dan $\chi''_4(P_n) \ge 5$ maka dapat disimpulkan $\chi''_4(P_n) = 5$ sehingga bilangan kromatik total $\chi''_4(P_n) = 5$.

Pada graf lintasan P_n, jika ditinjau dari pewarnaan titiknya, nilai dari $\min\{r, \max\{d(x_1) + |(N(x_i))|\}\} = \max\{d(x_1) + |(N(x_i))|\} = 4$. jika ditinjau dari pewarnaan sisi pada graf lintasan P_n, nilai dari $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 4$, sehingga mengakibatkan $\chi''_{r\ge4}(P_n) = 5$. Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 2 yang merupakan pewarnaan 4-dinamis dari graf lintasan (P_n). Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 1 terbukti.

Teorema 2. *Misal graf G adalah graf hasil operasi shackle dari graf buku B_2. Untuk $n \ge 2$, bilangan kromatik total r-dinamis shackle graf buku $Shack(B_2, v, n)$ adalah*

$$\chi''_r(Shack(B_2, v, n)) = \begin{cases} 5, \ \text{untuk } 1 \le \text{r} \le 3 \\ 6, \ \text{untuk r} = 4 \\ 9, \ \text{untuk r} = 5 \\ 10, \ \text{untuk r} \ge 6 \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan Observasi 4.1.7 himpunan titik graf $V(Shack(B_2, v, n)) = \{x_{ij}, z_{ij}; 1 \le i \le n, 1 \le j \le 2\} \cup \{y_i; 1 \le i \le n+1\}$ dan himpunan sisi $E(B_2, v, n)) = \{x_{ij}y_i; 1 \le i \le n, j = 1\} \cup \{x_{ij}y_{i+1}; 1 \le i \le n, j = 2\} \cup \{x_{ij}z_{ij+1}; 1 \le i \le n, j = 1\} \cup \{x_{ij+1}z_{ij}; 1 \le i \le n, j = 1\} \cup \{y_iz_{ij}; 1 \le i \le n, j = 1\} \cup \{y_{i+1}z_{ij}; 1 \le i \le n, j = 2\} \cup \{z_{ij}z_{ij+1}; 1 \le i \le n, j = 1\}$ sehingga kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(Shack(B_2, v, n)| = 5n+1$ dan $|E(Shack(B_2, v, n))| = 7n$ serta $\Delta(G) = 4$.

Kasus 1. Berdasarkan Dugaan 1 bahwa $\Delta(G) + 1 \le \chi''_r(G) \le \Delta(G) + 2$, sehingga $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \ge 5$. Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 1,2,3-dinamis pada graf $(Shack(B_2, v, n))$ adalah 5, maka perlu dibuktikan $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \ge 5$ dan $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \le 5$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \le 5$ dengan fungsi pewarnaan c_4. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_4 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_4 : (V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n))) \to D$. Fungsi pewarnaan c_4 adalah sebagai berikut:

$$c_4(x_{ij}) = \begin{cases} 4, \ 1 \le i \le n, \ j = 1 \\ 5, \ 1 \le i \le n, \ j = 2 \end{cases} \quad c_4(z_{ij}) = \begin{cases} 3, \ 1 \le i \le n, \ j = 1 \\ 2, \ 1 \le i \le n, \ j = 2 \end{cases}$$

$$c_4(y_i) = 1, 1 \le i \le n+1; \quad c_{23}(x_{ij}y_i) = 3, 1 \le i \le n, j = 1$$

$$c_4(x_{ij}y_{i+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_4(y_i z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_4(y_{i+1}z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_4(x_{ij}z_{ij+1}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_4(x_{ij+1}z_{ij}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1; \quad c_4(z_{ij}z_{ij+1}) = 1, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_4 terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku $(Shack(B_2, v, n))$ adalah $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \leq 5$. Karena bilangan kromatik $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \leq 5$ dan $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \geq 5$ maka dapat disimpulkan $\chi''(Shack(B_2, v, n)) = 5$. Sehingga graf $G = Shack(B_2, v, n)$ mempunyai bilangan kroamtik $\chi''(G) = \chi''_d(G) = \chi''_3(G) = 5$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_4(G) \geq \chi''_3(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \geq \chi''_3(Shack(B_2, v, n))$. Misalkan $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) = 5$ seperti pada fungsi pewarnaan c_4, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis, lihat tabel 3. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 6-pewarnaan, $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \geq 6$.

Table 3: Pewarnaan Titik z_{ij} pada $1, 2, 3$-dinamis graf $Shack(B_2, v, n)$

ij	$c(z_{ij})$	$\lvert c(N(z_{ij}))\rvert$	r	$d(z_{ij})+ \lvert(N(z_{ij}))\rvert$	$\min\{r, d(z_{ij})+ \lvert(N(z_{ij}))\rvert\}$	$\lvert c(N(z_{ij}))\rvert \geq \min\{r, d(z_{ij})+ \lvert(N(z_{ij}))\rvert\}$
11	2	3	1,2,3,4	6	1,2,3,4	**Y,Y,Y,T**
12	3	3	1,2,3	6	1,2,3	**Y,Y,Y**
21	2	3	1,2,3	6	1,2,3	**Y,Y,Y**
22	3	3	1,2,3	6	1,2,3	**Y,Y,Y**
31	2	3	1,2,3	6	1,2,3	**Y,Y,Y**
32	3	3	1,2,3	6	1,2,3	**Y,Y,Y**

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 4-dinamis pada graf $(Shack(B_2, v, n))$ adalah 6, perlu dibuktikan bahwa $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \geq 6$ dan $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \leq 6$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \leq 6$ dengan fungsi pewarnaan c_5. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_5 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_5 : V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n)) \to D$. Fungsi pewarnaan c_5 adalah sebagai berikut:

$$c_5(x_{ij}) = \begin{cases} 6, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ 3, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 2 \end{cases} \quad c_5(z_{ij}) = \begin{cases} 4, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ 5, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 2 \end{cases}$$

$$c_5(y_i) = 1, 1 \leq i \leq n+1; \quad c_{24}(x_{ij}y_i) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_5(x_{ij}y_{i+1}) = 6, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_5(y_i z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_5(y_{i+1}z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_5(x_{ij}z_{ij+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_5(x_{ij+1}z_{ij}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1; \quad c_5(z_{ij}z_{ij+1}) = 6, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

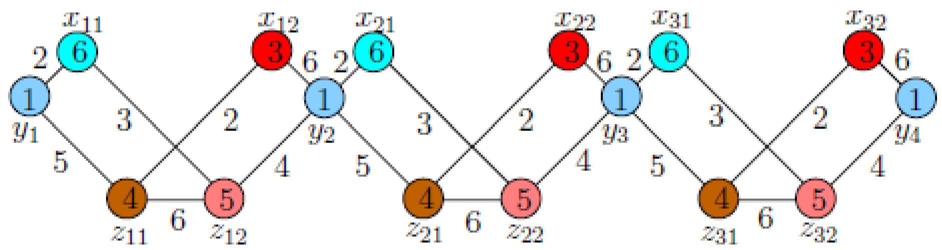

Figure 3: Pewarnaan Total 4-dinamis Pada Graf $Shack(B_2, v, n)$

Dari fungsi pewarnaan pada c_5 terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku, $G = (Shack(B_2, v, n))$adalah $\chi''_4(G) \leq 6$. Karena $\chi''_4(G) \leq 6$ dan $\chi''_4(G) \geq 6$ maka $\chi''_4(G) = 6$ sehingga bilangan kromatik $\chi''_4(G) = 6$. Sebagai ilustrasi, disajikan Gambar 4.24 yang merupakan pewarnaan 4-dinamis dari *shackle* graf buku B_2.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_5(G) \geq \chi''_4(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_5(Shack(B_2, v, n)) \geq \chi''_4(Shack(B_2, v, n))$. Misalkan $\chi''_5(Shack(B_2, v, n)) = 6$ seperti pada fungsi pewarnaan c_5, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 7-pewarnaan, sehingga $\chi''_5(Shack(B_2, v, n)) \geq 7$. Akan tetapi dengan 7 pewarnaan tetap tidak memenuhi pewarnaan total 5-dinamis sehingga ditambah menjadi 8 pewarnaan. Untuk 8 pewarnaan terdapat jumlah sisi yang tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis lihat tabel 4 maka ditambah menjadi 9 pewarnaan sehingga $\chi''_5(Shack(B_2, v, n)) \geq 9$.

Table 4: Pewarnaan Sisi dengan 8 warna pada graf $Shack(B_2, v, n)$

e =uv	$c(e)$	$\lvert c(N(e))\rvert$	r	$d(u) + d(v)$	$\min\{r, d(u)+ d(v)\}$	$\lvert c(N(e))\rvert \geq \min \{r, d(u) + d(v)\}$
$x_{11}y_1$	2	4	4,5	4	4,4	**Y,Y**
$x_{21}y_2$	2	5	4,5	6	4,5	**Y,Y**
$x_{12}y_2$	4	5	4,5	6	4,5	**Y,Y**
$x_{22}y_3$	4	4	4,5	4	4,4	**Y,Y**
$x_{11}z_{12}$	4	5	4,5	5	4,5	**Y,Y**
$x_{21}z_{22}$	4	5	4,5	5	4,5	**Y,Y**
$x_{12}z_{11}$	3	5	4,5	5	4,5	**Y,Y**
$x_{22}z_{21}$	3	5	4,5	5	4,5	**Y,Y**
y_1z_{11}	5	5	4,5	5	4,5	**Y,Y**
y_2z_{21}	5	6	4,5	7	4,5	**Y,Y**
y_2z_{12}	6	6	4,5	7	4,5	**Y,Y**
y_3z_{22}	6	4	4,5	5	4,5	**Y,T**
$z_{11}z_{12}$	7	5	4	6	4	**Y**
$z_{21}z_{22}$	7	5	4	6	4	**Y**

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 5-dinamis pada graf $Shack(B_2, v, n)$ adalah 9, maka perlu dibuktikan $\chi''_5(Shack(B_2, v, n)) \geq 9$ dan $\chi''_5(Shack(B_2, v, n)) \leq 9$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''_5(Shack(B_2, v, n)) \leq 9$ dengan fungsi pewarnaan c_6. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_6 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_6 : (V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n))) \to D$. Untuk $n \geq 2$, fungsi pewarnaan c_6 adalah sebagai berikut:

$$c_6(x_{ij}) = \begin{cases} 4,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 3,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \end{cases} \quad c_6(z_{ij}) = \begin{cases} 6,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 2,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \end{cases}$$

$$c_6(y_i) = 1, 1 \leq i \leq n+1; \quad c_6(x_{ij}y_i) = 8, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_6(x_{ij}y_{i+1}) = 9, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_6(y_i z_{ij}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_6(y_{i+1}z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_6(x_{ij}z_{ij+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_6(x_{ij+1}z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 1; \quad c_6(z_{ij}z_{ij+1}) = 7, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_6 terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku, $G = (Shack(B_2, v, n))$ adalah $\chi''_5(G) \leq 9$. Karena $\chi''_5(G) \leq 9$ dan $\chi''_5(G) \geq 9$ maka $\chi''_5(G) = 9$ sehingga bilangan kromatik $\chi''_5(G) = 9$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_6(G) \geq \chi''_5(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_6(Shack(B_2, v, n)) \geq \chi''_5(Shack(B_2, v, n))$. Misalkan $\chi''_6(Shack(B_2, v, n)) = 9$ seperti pada fungsi pewarnaan c_6, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis lihat tabel 5. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 10-pewarnaan, $\chi''_6(Shack(B_2, v, n)) \geq 10$.

Table 5: Pewarnaan Titik z_{ij} pada Pewarnaan Total 6-dinamis graf $Shack(B_2, v, n)$

ij	$c(z_{ij})$	$\lvert c(N(z_{ij}))\rvert$	r	$d(z_{ij})+$ $\lvert(N(z_{ij}))\rvert$	$\min\{r, d(z_{ij})+$ $\lvert(N(z_{ij}))\rvert\}$	$\lvert c(N(z_{ij}))\rvert \geq \min\{r,$ $d(z_{ij}) + \lvert N(z_{ij})\rvert$
11	6	5	5,6	6	5,6	**Y,T**
12	2	6	5	6	5	**Y**
21	6	5	5	6	5	**Y**
22	2	6	5	6	5	**Y**
31	6	5	5	6	5	**Y**
32	2	6	5	6	5	**Y**

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 6-dinamis pada graf $Shack(B_2, v, n)$ adalah 10, maka perlu dibuktikan $\chi''_6(Shack(B_2, v, n)) \geq 10$ dan $\chi''_6(Shack(B_2, v, n)) \leq 10$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''_6(Shack(B_2, v, n)) \leq 10$ dengan fungsi pewarnaan c_7. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_7 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_7 : (V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n))) \to D$. Fungsi pewarnaan c_7 adalah sebagai berikut:

$$c_7(x_{ij}) = \begin{cases} 4,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 3,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \end{cases} \quad c_7(z_{ij}) = \begin{cases} 6,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 8,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \end{cases}$$

$$c_7(y_i) = 1, 1 \leq i \leq n+1 \quad c_7(x_{ij}y_i) = 9, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

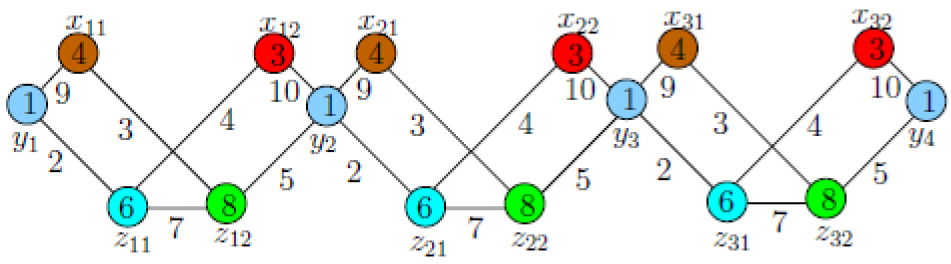

Figure 4: Pewarnaan Total r-dinamis Pada Graf $Shack(B_2, v, n)$

$$c_7(x_{ij}y_{i+1}) = 10, 1 \leq i \leq n, j = 2$$

$$c_7(y_i z_{ij}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1 \quad c_7(y_{i+1}z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 2$$

$$c_7(x_{ij}z_{ij+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_7(x_{ij+1}z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_7(z_{ij}z_{ij+1}) = 7, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_7 terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku B_2 adalah $\chi''_6(G) \leq 10$. Karena $\chi''_6(G) \leq 10$ dan $\chi''_6(G) \geq 10$ maka $\chi''_6(G) = 10$ sehingga $\chi''_6(G) = 10$. Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 4 yang merupakan pewarnaan r-dinamis dari *shackle* graf buku B_2.

Pada graf hasil operasi *shackle* graf buku B_2, jika ditinjau dari pewarnaan titiknya, nilai dari $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(z_{ij}) + |(N(z_{ij}))|\} = 8$. Untuk pewarnaan sisi pada graf hasil operasi *shackle* graf buku B_2, nilai dari $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 7$, sehingga mengakibatkan $\chi''_{r\geq 6}(Shack(B_2, v, n)) = 10$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 6$ nilai $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(z_{ij}) + |(N(z_{ij}))|\} = 6$ dan nilai $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 7$. Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 2 terbukti.

Teorema 3. *Misal graf G adalah graf hasil operasi generalized shackle dari graf friendship* $\mathbf{F}_4$. *Untuk $n \geq 2$, bilangan kromatik total r-dinamis generalized shackle graf buku friendship* $\mathbf{F}_4$ *adalah*

$$\chi''_r(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \begin{cases} 9, \text{ untuk } 1 \leq \text{r} \leq 5 \\ 10, \text{ untuk } 6 \leq \text{r} \leq 8 \\ 11 \text{ untuk r} = 9 \\ 12, \text{ untuk r} = 10 \\ 16, \text{ untuk } 11 \leq \text{r} \leq 15 \\ 17, \text{ untuk r} \geq 16 \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan Observasi 4.1.8 himpunan titik graf $V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, z_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, j = 1, 3\} \cup \{x_i x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\}$ $\cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ sehingga $|V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))| = 7n+2$ dan $|E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))| = 11n + 1$ serta $\Delta(G) = 8$.

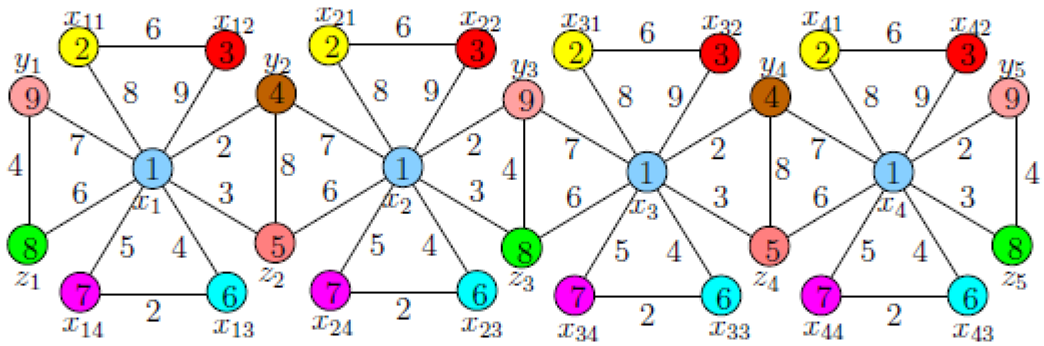

Figure 5: Pewarnaan Total 1,2,3,4,5-dinamis pada Graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, 4)$

Kasus 1. Berdasarkan Dugaan 1 bahwa $\Delta(G) + 1 \leq \chi''_r(G) \leq \Delta(G) + 2$, sehingga $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 9$. Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total r-dinamis dimana $1 \leq r \leq 5$ pada graf $(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ adalah 9, maka perlu dibuktikan $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 9$ dan $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$ dengan fungsi pewarnaan c_8. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_8 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_8 : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$. Fungsi pewarnaan c_8 adalah sebagai berikut:

$$c_8(x_i) = 1, \ 1 \leq i \leq n \quad c_8(x_i y_i) = 7, \ 1 \leq i \leq n$$

$$c_8(x_i y_{i+1}) = 2, \ 1 \leq i \leq n; \quad c_8(x_i z_i) = 6, \ 1 \leq i \leq n$$

$$c_8(x_i z_{i+1}) = 3, \ 1 \leq i \leq n$$

$$c_8(y_i) = \begin{cases} 9, \ 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ ganjil} \\ 4, \ 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_8(z_i) = \begin{cases} 8, \ 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ ganjil} \\ 5, \ 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_8(x_{ij} x_{ij+1}) = \begin{cases} 6, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ 2, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 3 \end{cases} \quad c_8(y_i z_i) = \begin{cases} 4, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \\ 8, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_8(x_{ij}) = \begin{cases} 2, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ 3, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 2 \\ 6, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 3 \\ 7, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 4 \end{cases} \quad c_8(x_i x_{ij}) = \begin{cases} 8, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ 9, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 2 \\ 4, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 3 \\ 5, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_8 terlihat bahwa bilangan kromatik total 1-dinamis dari graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ adalah $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$. Karena bilangan kromatik $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$ dan $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 9$ maka bilangan kromatik $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 9$. Pada fungsi c_8 juga berlaku untuk $2 \leq r \leq 5$ sehingga $\chi''_2(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \chi''_3(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \chi''_5(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 9$. Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 5 yang merupakan pewarnaan 1,2,3,4,5-dinamis dari *generalized shackle* graf friendship $\mathbf{F}_4$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_6(G) \geq \chi''_5(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi''_5(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$. Misalkan $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 9$ seperti pada fungsi pewarnaan c_8, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis, lihat tabel 6. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 10-pewarnaan agar definisi pewarnaan total r-dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 10$.

Table 6: Pewarnaan Titik z_i pada $1,2,3,4,5$-dinamis graf $gshack(\mathbf{F}_4,e,n)$

i	$c(z_i)$	$\lvert c(N(z_i))\rvert$	r	$d(z_i)+ \lvert (N(z_i))\rvert$	$\min\{r, d(z_i)+ \lvert (N(z_i))\rvert\}$	$\lvert c(N(z_i))\rvert \geq \min\{r, d(z_i)+\lvert (N(z_i))\rvert$
1	8	4	5,6	4	4,4	**Y,Y**
2	5	5	5,6	6	5,6	**Y,T**
3	8	5	5	6	5	**Y**
4	5	5	5	6	5	**Y**
5	8	4	5	4	4	**Y**

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 6-dinamis pada graf $(gshack(\mathbf{F}_4,e,n))$ adalah 10, maka perlu dibuktikan $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \geq 10$ dan $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \leq 10$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \leq 10$ dengan fungsi pewarnaan c_9. Misal $D = \{1,2,3,\ldots,k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_9 adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_9 : (V(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4,e,n))) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$. Fungsi pewarnaan c_9 adalah sebagai berikut:

$$c_9(x_iy_i) = 7,\ 1 \leq i \leq n \quad c_9(x_iy_{i+1}) = 2,\ 1 \leq i \leq n$$

$$c_9(x_iz_i) = 6,\ 1 \leq i \leq n; \quad c_9(x_iz_{i+1}) = 3,\ 1 \leq i \leq n$$

$$c_9(x_i) = \begin{cases} 1,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 10,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_9(y_i) = \begin{cases} 9,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ ganjil} \\ 4,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_9(z_i) = \begin{cases} 8,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ ganjil} \\ 5,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_9(x_{ij}x_{ij+1}) = \begin{cases} 6,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 2,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 3 \end{cases}$$

$$c_9(y_iz_i) = \begin{cases} 4,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 8,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_9(x_{ij}) = \begin{cases} 2,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 3,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \\ 6,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 3 \\ 7,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 4 \end{cases} \quad c_9(x_ix_{ij}) = \begin{cases} 8,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 9,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \\ 4,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 3 \\ 5,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_9 terlihat bahwa bilangan kromatik total 6-dinamis graf $gshack(\mathbf{F}_4,e,n)$ adalah $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \leq 10$. Karena bilangan kromatik $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \leq 10$ dan $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \geq 10$ maka bilangan kromatik $\chi''_6(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) = 10$. Fungsi pewarnaan c_9 juga dapat berlaku untuk $7 \leq r \leq 8$ sehingga $\chi''_7(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) = \chi''_8(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) = 10$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_9(G) \geq \chi''_8(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \geq \chi''_8(gshack(\mathbf{F}_4,e,n))$. Misalkan $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) = 10$ seperti pada fungsi pewarnaan c_9, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis, lihat tabel 7. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 11-pewarnaan agar definisi pewarnaan total r-dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \geq 11$.

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 9-dinamis pada graf $(gshack(\mathbf{F}_4,e,n))$ adalah 11, maka perlu dibuktikan $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \geq 11$ dan $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4,e,n)) \leq$

Table 7: Pewarnaan Titik x_i dengan 10 warna pada graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

i	$c(z_i)$	$\|c(N(z_i))\|$	r	$d(z_i)+ \|(N(z_i))\|$	$\min\{r, d(z_i)+ \|(N(z_i))\|\}$	$\|c(N(z_i))\| \geq \min\{r, d(z_i) + \|(N(z_i))\|$
1	1	8	8,9	16	8,9	**Y,T**
2	10	8	8	16	8	**Y**
3	1	8	8	16	5	**Y**
4	10	8	8	16	5	**Y**

11. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$ dengan fungsi pewarnaan c_{10}. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_{10} adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_{10} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \to D$. Fungsi pewarnaan c_{10} adalah sebagai berikut:

$$c_{10}(x_iy_i) = 7,\ 1 \leq i \leq n \quad c_{10}(x_iy_{i+1}) = 2,\ 1 \leq i \leq n$$

$$c_{10}(x_iz_i) = 6,\ 1 \leq i \leq n; \quad c_{10}(x_iz_{i+1}) = 3,\ 1 \leq i \leq n$$

$$c_{10}(y_iz_i) = 11,\ 1 \leq i \leq n+1; \quad c_{10}(x_{ij}x_{ij+1}) = 11,\ 1 \leq i \leq n$$

$$c_{10}(x_i) = \begin{cases} 1,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 10,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{10}(y_i) = \begin{cases} 9,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ ganjil} \\ 4,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{10}(z_i) = \begin{cases} 8,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ ganjil} \\ 5,\ 1 \leq i \leq n+1,\ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{10}(x_ix_{ij}) = \begin{cases} 8,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 9,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \\ 4,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 3 \\ 5,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 4 \end{cases}$$

$$c_{10}(x_{ij}) = \begin{cases} 10,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil},\ j = 1, 3 \\ 3,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 2 \\ 7,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 4 \\ 1,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap},\ j = 1 \\ 10,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil},\ j = 3 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_{10} terlihat bahwa bilangan kromatik total 9-dinamis dari graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ adalah $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 11$. Karena bilangan kromatik $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 11$ dan $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 11$ dapat disimpulkan $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 11$ sehingga $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 11$. Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 6 yang merupakan pewarnaan 9-dinamis dari *generalized shackle* graf friendship $\mathbf{F}_4$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_{10}(G) \geq \chi''_9(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$. Misalkan $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 11$ seperti pada fungsi pewarnaan c_{10}, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis, lihat tabel 8. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 12-pewarnaan agar definisi pewarnaan total r-dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 12$.

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 10-dinamis pada graf $(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ adalah 12, perlu dibuktikan $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 12$ dan $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 12$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 12$

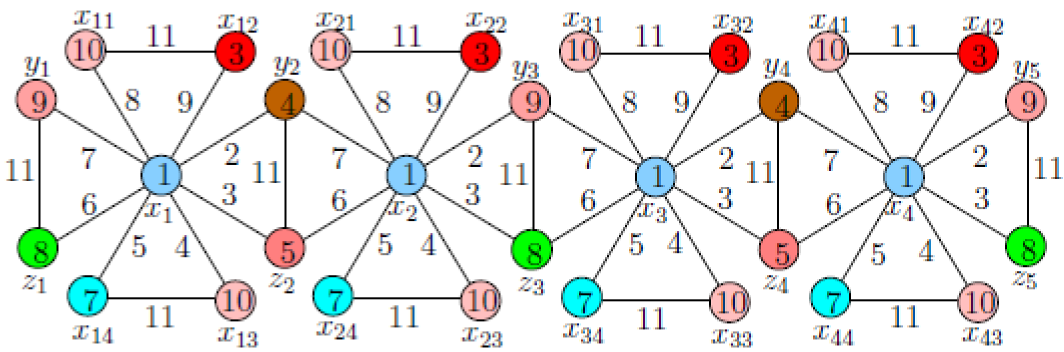

Figure 6: Pewarnaan Total 9-dinamis pada Graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, 4)$

Table 8: Pewarnaan Titik x_i dengan 10 warna pada graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

i	$c(x_i)$	$\lvert c(N(x_i))\rvert$	r	$d(x_i)+$ $\lvert(N(x_i))\rvert$	$\min\{r, d(x_i)+$ $\lvert(N(x_i))\rvert\}$	$\lvert c(N(x_i))\rvert \geq \min\{r,$ $d(x_i) + \lvert(N(x_i))\rvert\}$
1	1	9	9,10	16	8,9	**Y,T**
2	10	9	9	16	8	**Y**
3	1	9	9	16	5	**Y**
4	10	9	9	16	5	**Y**

dengan fungsi pewarnaan c_{11}. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_{11} adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_{11} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \to D$. Fungsi pewarnaan c_{11} adalah sebagai berikut:

$$c_{11}(y_i) = 10, \ 1 \leq i \leq n \quad c_{11}(z_i) = 11, \ 1 \leq i \leq n$$

$$c_{11}(x_i y_i) = 7, \ 1 \leq i \leq n; \quad c_{11}(x_i y_{i+1}) = 2, \ 1 \leq i \leq n$$

$$c_{11}(x_i z_i) = 6, \ 1 \leq i \leq n; \quad c_{11}(x_i z_{i+1}) = 3, \ 1 \leq i \leq n$$

$$c_{11}(x_{ij} y_{ij+1}) = 12, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1, 3 \quad c_{11}(y_i z_i) = 3, \ 1 \leq i \leq n+1$$

$$c_{11}(x_i) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \\ 9, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{11}(x_{ij}) = \begin{cases} 10, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1, 3 \\ 11, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 2, 4 \end{cases}$$

$$c_{11}(x_i x_{ij}) = \begin{cases} 8, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ 9, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 2 \\ 1, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \ j = 2 \\ 4, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 3 \\ 5, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_{11} terlihat bahwa bilangan kromatik total 10-dinamis dari graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ adalah $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 12$. Karena $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq$

12 dan $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 12$ dapat disimpulkan $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 12$ sehingga $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 12$.

Kasus 5. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_{11}(G) \geq \chi''_{10}(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$. Misalkan $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 12$ seperti pada fungsi pewarnaan c_{11}, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis,sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 13-pewarnaan, $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 13$. Akan tetapi dengan 13-pewarnaan tidak memenuhi pewarnaan total r-dinamis, sehingga ditambah menjadi 14 warna. Begitu juga dengan 15 warna tetap tidak memenuhi pewarnaan total r-dinamis lihat tabel 9, sehingga perlu penambahan warna menjadi 16-warna. $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 16$

Table 9: Pewarnaan Sisi dengan 15 pewarnaan pada graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

e =uv	$c(e)$	$\lvert c(N(e))\rvert$	r	$d(u)+d(v)$	$\min\{r, d(u)+d(v)\}$	$\lvert c(N(e))\rvert \geq \min\{r, d(u)+d(v)\}$
x_1z_1	6	10	10,11	10	10,10	**Y,Y**
x_2z_2	11	10	10,11	11	10,11	**Y,T**
x_3z_3	6	11	10	11	10	**Y**

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 11-dinamis pada graf $(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ adalah 16, perlu dibuktikan $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 16$ dan $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 16$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 16$ dengan fungsi pewarnaan c_{12}. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_{12} adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_{12} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \to D$. Fungsi pewarnaan c_{12} adalah sebagai berikut:

$$c_{12}(z_i) = 11,\ 1 \leq i \leq n+1$$

$$c_{12}(x_i) = \begin{cases} 1,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 9,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{12}(y_i) = \begin{cases} 14,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 15,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(x_iy_i) = \begin{cases} 7,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 10,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{12}(x_iy_{i+1}) = \begin{cases} 2,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 12,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(x_iz_i) = \begin{cases} 6,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 11,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{12}(x_iz_{i+1}) = \begin{cases} 3,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 13,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(y_iz_i) = \begin{cases} 15,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ 14,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(x_{ij}x_{ij+1}) = \begin{cases} 11,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil},\ j = 1 \\ 12,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil},\ j = 3 \\ 6,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap}, \jmath = 1 \\ 3,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap}, \jmath = 3 \end{cases}$$

$$c_{12}(x_ix_{ij}) = \begin{cases} 8,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 1 \\ 9,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil},\ j = 2 \\ 1,\ 1 \leq i \leq n,\ i \text{ genap},\ j = 2 \\ 4,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 3 \\ 5,\ 1 \leq i \leq n,\ j = 4 \end{cases}$$

$$c_{12}(x_{ij}) = \begin{cases} 10, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil}, \; j = 1 \\ 12, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil}, \; j = 2 \\ 11, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil}, \; j = 3 \\ 13, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil}, \; j = 4 \\ 2, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap}, \; j = 1 \\ 3, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap}, \; j = 2 \\ 6, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap}, \; j = 3 \\ 7, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap}, \; j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_{12} terlihat bahwa bilangan kromatik total 11-dinamis dari graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ adalah $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \le 16$. Karena $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \le 16$ dan $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \ge 16$ dapat disimpulkan $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 16$ sehingga bilangan kromatik untuk $11 \le r \le 15$ pada graf $G = gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ adalah $\chi''_{11}(G) = \chi''_{12}(G) = \chi''_{13}(G) = \chi''_{14}(G) = \chi''_{15}(G) = 16$.

Kasus 6. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\chi''_{16}(G) \ge \chi''_{10}(G)$, dapat disimpulkan $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \ge \chi''_{15}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$. Misalkan $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 16$ seperti pada fungsi pewarnaan c_{12}, maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total r-dinamis lihat tabel 10, sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 17-pewarnaan agar definisi pewarnaan total r-dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \ge 17$.

Table 10: Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 15-dinamis graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

i	$c(x_i)$	$\lvert c(N(x_i))\rvert$	r	$d(x_i)+ \lvert(N(x_i))\rvert$	$\min\{r, d(x_i)+ \lvert(N(x_i))\rvert\}$	$\lvert c(N(x_i))\rvert \ge \min\{r, d(x_i) + \lvert(N(x_i))\rvert$
1	1	15	15,16	16	15,16	**Y,T**
2	9	15	15	16	15	**Y**
3	1	15	15	16	15	**Y**
4	9	15	15	16	15	**Y**

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 16-dinamis pada graf $(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ adalah 17, perlu dibuktikan $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \ge 17$ dan $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \le 17$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \le 17$ dengan fungsi pewarnaan c_{13}. Misalkan $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan warna dengan k warna dan c_{13} adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna D, $c_{13} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \to D$. Fungsi pewarnaan c_{13} adalah sebagai berikut:

$$c_{13}(x_i) = \begin{cases} 1, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil} \\ 9, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(y_i) = \begin{cases} 14, \; 1 \le i \le n+1, \; i \text{ ganjil} \\ 15, \; 1 \le i \le n+1, \; i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{13}(y_i z_i) = \begin{cases} 15, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil} \\ 14, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(z_i) = \begin{cases} 17, \; 1 \le i \le n+1, \; i \text{ ganjil} \\ 16, \; 1 \le i \le n+1, \; i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{13}(x_i y_i) = \begin{cases} 7, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil} \\ 10, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(x_i y_{i+1}) = \begin{cases} 2, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil} \\ 12, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{13}(x_i z_i) = \begin{cases} 6, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil} \\ 11, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(x_i z_{i+1}) = \begin{cases} 3, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ ganjil} \\ 13, \; 1 \le i \le n, \; i \text{ genap} \end{cases}$$

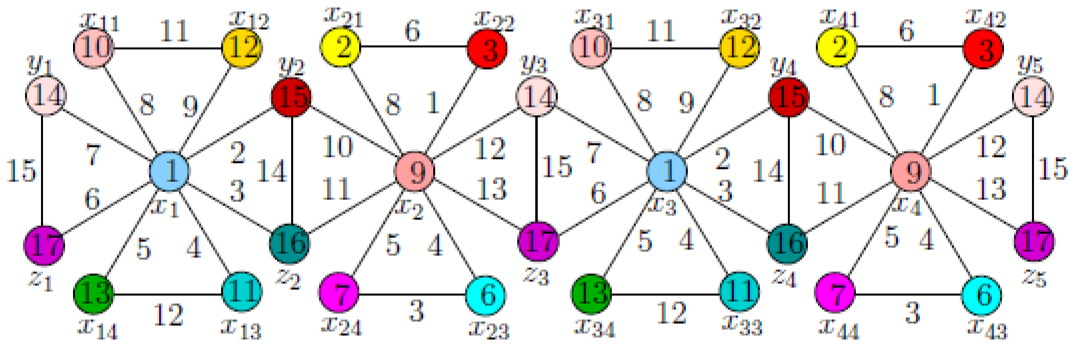

Figure 7: Pewarnaan Total r-dinamis pada Graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, 4)$

$$c_{13}(x_{ij}x_{ij+1}) = \begin{cases} 11, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 1 \\ 12, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 3 \\ 6, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \jmath = 1 \\ 3, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \jmath = 3 \end{cases}$$

$$c_{13}(x_i x_{ij}) = \begin{cases} 8, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1 \\ 9, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 2 \\ 1, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \ j = 2 \\ 4, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 3 \\ 5, \ 1 \leq i \leq n, \ j = 4 \end{cases}$$

$$c_{13}(x_{ij}) = \begin{cases} 10, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 1 \\ 12, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 2 \\ 11, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 3 \\ 13, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \ j = 4 \\ 2, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \ j = 1 \\ 3, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \ j = 2 \\ 6, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \ j = 3 \\ 7, \ 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \ j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada c_{13} terlihat bahwa bilangan kromatik total 16-dinamis dari graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ adalah $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 17$. Karena $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 17$ dan $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 17$ dapat di-simpulkan $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 17$ sehingga bilangan kromatik $\chi''_{16}(G) = \chi''_{16}(G) = 17$. Sebagai ilustrasi, disajikan Gambar 4.29 yang merupakan pewarnaan r-dinamis dari *generalized shackle* graf friendship $\mathbf{F}_4$.

Pada graf hasil operasi *generalized shackle* graf friendship $\mathbf{F}_4$, jika ditinjau dari pewarnaan titiknya, nilai dari $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(x_i) + |(N(x_i))|\} = 16$. Untuk pewarnaan sisi pada graf hasil operasi *generalized shackle* graf friendship $\mathbf{F}_4$, nilai dari $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 11$, sehingga mengakibatkan $\chi''_{r\geq 16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 17$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 16$ nilai $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(x_i) + |(N(x_i))|\} = 16$ dan nilai $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 11$. Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 3 terbukti.

Masalah terbuka 1 Tentukan bilangan kromatik pewarnaan total r-dinamis dari graf khusus dan graf hasil operasi *shackel* dan *generalized shackel* graf yang lain.

Referensi

[1] Dafik, Hasan, Azizah dan Agustin, "A Generalized Shackle of Any Graph H Admits a Super H-Antimagic Total Labelling", Artikel, Jember: Universitas Jember, (2010).

[2] Geetha, J. dan Somasundaran, K., "Total Chromatic Number and Some Topological Indices", Department of Mathematics, Amrita Vishwa Vidyapeetham, Coimbatore-641 112, India.

[3] Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika, (2009).

[4] Nugroho, D. B., Catatan Kuliah (2 SKS) MX 324 Pengantar Teori Graf, Universitas Kristen Satya Wacana, (2008).

[5] Slamin. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember, (2009).